

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ FIZIKE

3. SKUPINA ZADATAKA

ŠKOLSKA GODINA 2025./2026.

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak na drugačiji, ali fizikalno pravilan način, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

Zadatak 1. (10 bodova)

Astronaut na međunarodnoj svemirskoj stanici (ISS) izmjeri zapornom urom period njihala 1.5 s, nakon čega svemirskim brodom u misiji Artemis krene prema Mjesecu. Na pola puta između Zemlje i Mjeseca opet izmjeri period njihala, no on sada iznosi 42.68 s. Koliko iznosi masa Mjeseca?

Međunarodna svemirska stanica nalazi se 420 km iznad površine Zemlje, dok je polumjer Zemlje 6370 km, a masa $5.97 \cdot 10^{24}$ kg. Zanimajte utjecaj Mjeseca na međunarodnu svemirsku stanicu. Udaljenost između Zemlje i Mjeseca iznosi 384 000 km. Zanimajte otpor zraka i masu niti njihala. Njihalo nije s malim otklonima od ravnotežnog položaja.

Rješenje.

Primijetite da se radi o matematičkom njihalu. Perioda matematičkog njihala duljine l na međunarodnoj svemirskoj stanici gdje je ubrzanje sile teže jednako g_{ISS} iznosi:

$$T_{ISS} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_{ISS}}} \quad 1 \text{ bod}$$

Ubrzanje sile teže g_{ISS} na međunarodnoj stanici možemo odrediti pomoću izraza za gravitacijsku silu i Newtonova zakona primijenjenih na masu m obješenu na njihalo:

$$F_{gISS} = G \frac{mM_Z}{(R_Z + H_{ISS})^2} \quad 1 \text{ bod}$$

gdje su R_Z i M_Z polumjer i masa Zemlje, a H_{ISS} je visina međunarodne stanice nad površinom Zemlje.

1. Newtonov zakon:

$$F = am \rightarrow F_{gISS} = g_{ISS}m$$

$$g_{ISS} = \frac{GM_Z}{(R_Z + H_{ISS})^2} \quad 1 \text{ bod}$$

Iz gornje relacije dobijemo duljinu niti:

$$l = \frac{g_{ISS} \cdot T_{ISS}^2}{4\pi^2} = \frac{GM_Z \cdot T_{ISS}^2}{4\pi^2 (R_Z + H_{ISS})^2} \quad 1 \text{ bod}$$

Na pola puta između Zemlje i Mjeseca, na uteg obješen na njihalu djelovat će u međusobno suprotnim smjerovima gravitacijska sila Zemlje F_{gZ} i gravitacijska sila Mjeseca F_{gM} :

$$F_{gZ} = G \frac{mM_Z}{\left(\frac{1}{2}d_{ZM}\right)^2}$$

$$F_{gM} = G \frac{mM_M}{\left(\frac{1}{2}d_{ZM}\right)^2} \quad 1 \text{ bod}$$

Rezultantna sila koja djeluje na njihalo iznosi:

$$F_R = am = F_{gZ} - F_{gM} \quad 1 \text{ bod}$$

Ako primijetimo da je ubrzanje a u stvari rezultatno ubrzanje sile teže na pola puta između Zemlje i Mjeseca, g_{MZ} , dobijemo:

$$g_{ZM} \cdot m = G \frac{4mM_Z}{d_{ZM}^2} - G \frac{4mM_M}{d_{ZM}^2} \quad 1 \text{ bod}$$

Sada je ubrzanje sile teže na pola puta od Zemlje i Mjeseca jednako:

$$g_{ZM} = \frac{4G}{d_{ZM}^2} (M_Z - M_M) \quad 1 \text{ bod}$$

Period njihala sada iznosi:

$$T_{ZM} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_{ZM}}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$T_{ZM} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cdot d_{ZM}^2}{4G(M_Z - M_M)}} \quad 1 \text{ bod}$$

Odnosno masa Mjeseca:

$$4G(M_Z - M_M) = \frac{4\pi^2 l \cdot d_{ZM}^2}{T_{ZM}^2}$$

$$M_M = M_Z - \frac{\pi^2 l \cdot d_{ZM}^2}{G \cdot T_{ZM}^2}$$

$$M_M = M_Z - \frac{\pi^2 d_{ZM}^2}{G \cdot T_{ZM}^2} \cdot \frac{GM_Z \cdot T_{ISS}^2}{4\pi^2 (R_Z + H_{ISS})^2} = M_Z - \frac{M_Z \cdot d_{ZM}^2}{4(R_Z + H_{ISS})^2} \left(\frac{T_{ISS}}{T_{ZM}} \right)^2 \quad 1 \text{ bod}$$

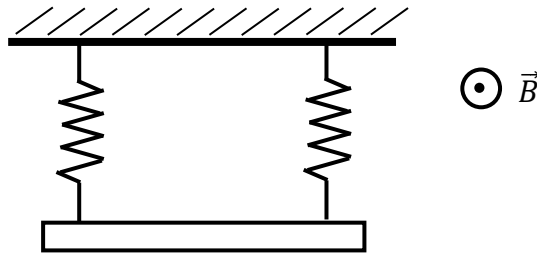
$$M_M = 7.382 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

NAPOMENA: S obzirom na to da je masa Mjeseca mnogo manja od mase Zemlje, male razlike u međurezultatu (npr. izračun duljine niti njihala) mogu dovesti do znatnih razlika u izračunatoj masi Mjeseca. Ako je učenik koristio međurezultat, a postupak je ispravan, priznati numeričko rješenje čak i ako se bitno razlikuje od gore navedenog rezultata, u intervalu od $5.5 \cdot 10^{22}$ do $10.8 \cdot 10^{22}$ kg.

Zadatak 2. (10 bodova)

Metalni štap duljine 20 cm, mase 100 g i zanemarive debljine obješen je na dvije identične elastične opruge. Svaka je opruga koeficijenta elastičnosti 100 N/m. Opruge i štap nalaze se u homogenom magnetskom polju $B = 2$ T. Štap započne oscilirati nakon što ste ga pomaknuli tako da su se obje opruge produljile za 10 cm. Opruge osciliraju kao harmonički oscilatori.

- Odredite napon na krajevima štapa u ovisnosti o vremenu, magnetskom polju, elongaciji, koeficijentu elastičnosti opruga i masi štapa.
- Koliki se najveći napon inducira na krajevima štapa?
- Kojom se frekvencijom mijenja inducirani napon?

**Rješenje:**

Uslijed gibanja naboja u štapu duljine L brzinom v koji se nalazi u magnetskom polju B , djelovat će Lorentzova sila $q(\vec{v} \times \vec{B})$. Ako je dužina štapa okomita na smjer gibanja, a smjer gibanja okomit na magnetsko polje, Lorentzova sila qvB djelovat će uzduž štapa i uzrokovati razliku potencijala (napon) na krajevima štapa:

$$U = BLv \quad 1 \text{ bod}$$

Štap je obješen o dvije elastične opruge zbog čega izvodi harmoničko gibanje.

Postavimo štap obješen o dvije opruge u koordinatni sustav tako da je njegov ravnotežni položaj u $x = 0$. Ukoliko smo štap pomaknuli tako da smo opruge rastegli za 10 cm i u tom trenutku $t = 0$ pustili da titra, njegov vertikalni položaj je $x(t = 0) = -10$ cm. Vertikalni položaj $x(t)$ mijenja se kao:

$$x(t) = A \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

gdje je A elongacija, odnosno maksimalno produljenje opruga $A = 10$ cm.

Vertikalna brzina štapa iznosi:

$$v(t) = A\omega \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad 1 \text{ bod}$$

Napon na krajevima štapa mijenjat će se kao:

$$U(t) = BLA\omega \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad 2 \text{ boda}$$

NAPOMENA: Ukoliko učenik prepozna da produljenje opruge od 10 cm predstavlja elongaciju titranja obješenog štapa $A = 10$ cm, te u početnom trenutku $t = 0$ postavi štap u ravnotežni položaj $x(t = 0) = 0$, potrebno je priznati bodove prema ocjenjivanju na isti način kao i gore. U tom je slučaju vertikalni položaj štapa $x(t)$:

$$x(t) = A \sin \omega t$$

Vertikalna brzina štapa tada iznosi:

$$v(t) = A\omega \cos \omega t$$

Napon na krajevima štapa mijenjat će se kao:

$$U(t) = BLA\omega \cos \omega t$$

Kružnu frekvenciju ω možemo odrediti iz perioda harmoničkog oscilatora:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Period odredimo poznavajući koeficijent elastičnosti opruga i masu štapa:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{12}}} \quad 1 \text{ bod}$$

Primijetimo da su dvije opruge spojene paralelno, pa ih možemo zamijeniti jednom oprugom ekvivalentnog koeficijenta elastičnosti:

$$k_{12} = k_1 + k_2 = 2k \quad 1 \text{ bod}$$

s obzirom na to da obje opruge imaju jednak koeficijent elastičnosti $k_1 = k_2 = k$.

NAPOMENA: Ukoliko učenik ne prepozna da se radi o paralelno spojenim oprugama, ne oduzimati bodove za kasnije netočne rezultate zbog korištenja pogrešnog međurezultata.

Kružna je frekvencija stoga:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad 1 \text{ bod}$$

a) Napon na krajevima štapa mijenja se kao:

$$U(t) = BLA \sqrt{\frac{2k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t - \frac{\pi}{2}\right) \quad 1 \text{ bod}$$

Bod za podzadatak a) priznati i ako učenik ponudi relaciju s uvrštenim numeričkim iznosima:

$$U(t) = 1.79 \text{ V} \cdot \cos(44.72 \text{ s}^{-1} \cdot t - 1.57)$$

NAPOMENA: Ukoliko je učenik postavio štap u ravnotežni položaj $x = 0$ u trenutku $t = 0$, priznati i rezultat:

$$U(t) = BLA \sqrt{\frac{2k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t\right)$$

Odnosno:

$$U(t) = 1.79 \text{ V} \cdot \cos(44.72 \text{ s}^{-1} \cdot t)$$

b) Najveći napon inducira se kada je brzina štapa najveća:

$$U_{\max} = BLA \sqrt{\frac{2k}{m}} = 1.79 \text{ V} \quad 1 \text{ bod}$$

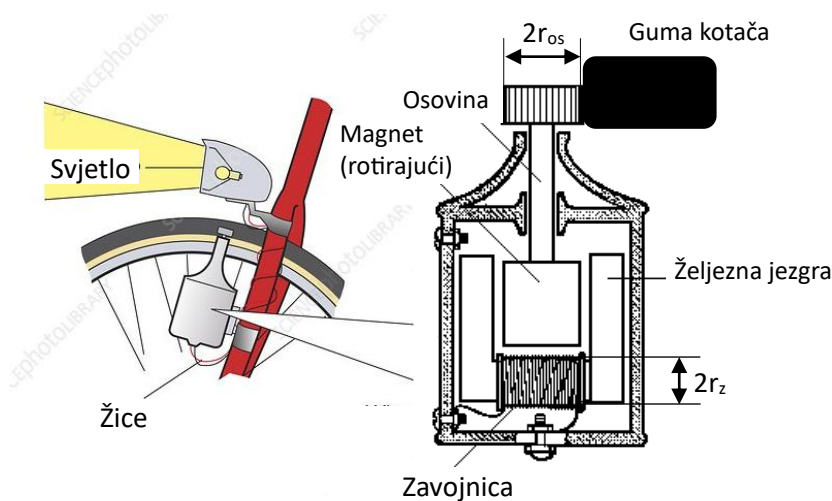
c) Frekvencija kojom se mijenja napon jednaka je frekvenciji harmoničkog oscilatora:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad 1 \text{ bod}$$
$$f = 7.12 \text{ Hz}$$

Zadatak 3. (10 bodova)

Dinamo na biciklu služi kao izvor napona za prednje svjetlo. Dinamo se sastoji od rotirajuće osovine na čijem je kraju spojen rotirajući magnet koji unutar zavojnice s 400 zavoja stvara vremenski promjenjivo, ali prostorno homogeno magnetsko polje koje je uvijek paralelno s osi zavojnice. Željezna jezgra služi za vođenje magnetskog polja od magneta do unutrašnjosti zavojnice. Magnetsko polje mijenja se linearno između minimalne $B_{min} = -0.2 \text{ T}$ i maksimalne vrijednosti $B_{max} = +0.2 \text{ T}$ i u vremenu koje odgovara polovici perioda rotacije osovine. Rotirajuća osovina polumjera $r_{os} = 0.5 \text{ cm}$ dodiruje kotač na vrhu gume i rotira bez proklizavanja. Polumjer presjeka zavojnice iznosi $r_z = 1 \text{ cm}$.

Ako se biciklist kreće brzinom 30 km/h , odredite inducirani elektromotorni napon u dinamu. Kolikom se minimalnom brzinom bicikla mora kretati da bi se prednje svjetlo upalilo ako je žarulji potreban napon od barem 12 V da bi svijetlila?

**Rješenje:**

Zbog promjenjivog magnetskog polja koje je uvijek okomito na površinu petlje, u zavojnici dolazi do induciranja elektromotornog napona na krajevima zavojnice (zanemarujemo predznak):

$$U = N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad 1 \text{ bod}$$

gdje je N broj zavoja zavojnice.

U intervalu polovice perioda rotacije osovine magnetsko se polje promijeni od minimalne do maksimalne vrijednosti, pa je promjena magnetskog toka jednaka:

$$\Delta\Phi = \Phi_{max} - \Phi_{min}$$

Magnetski tok:

$$\Phi = B \cdot A = B \cdot r_z^2 \pi \quad 1 \text{ bod}$$

gdje je $r_z = 1.5 \text{ cm}$ polumjer presjeka zavojnice (petlje). Promjena magnetskog toka sada je:

$$\Delta\Phi = (B_{max} - B_{min}) \cdot r_z^2 \pi = 2B_{max} \cdot r_z^2 \pi \quad 1 \text{ bod}$$

Ova se promjena magnetskog toka zbiva u vremenu polovice perioda promjene magnetskog polja koji odgovara polovici perioda rotacije osovine:

$$\Delta t = \frac{1}{2} P_{os} \quad 1 \text{ bod}$$

Inducirani elektromotorni napon konačno je:

$$U = N \frac{4B_{\max} \cdot r_Z^2 \pi}{P_{os}}$$

Potrebno je još izračunati period rotacije osovine:

$$P_{os} = \frac{2\pi}{\omega_{os}} \quad 1 \text{ bod}$$

Kutna brzina osovine ω_{os} određena je obodnom brzinom osovine v_{os} :

$$\omega_{os} = \frac{v_{os}}{r_{os}} \quad 1 \text{ bod}$$

Osovina rotira bez proklizavanja u kontaktu s gumom, stoga ima istu obodnu brzinu kao i guma, odnosno kotač:

$$v_{os} = v_k \quad 1 \text{ bod}$$

Obodna brzina kotača jednaka je brzini bicikla v :

$$v_k = v \quad 1 \text{ bod}$$

Konačno dobijemo za period rotacije osovine:

$$P_{os} = \frac{2\pi \cdot r_{os}}{v}$$

Inducirani elektromotorni napon je:

$$U = N \frac{4B_{\max} \cdot r_Z^2 \pi \cdot v}{2\pi \cdot r_{os}} = N \frac{2B_{\max} \cdot r_Z^2 \cdot v}{r_{os}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$U = 26.67 \text{ V}$$

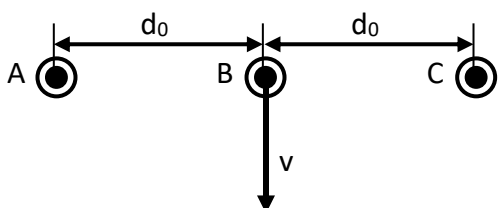
Ako je minimalni napon za pokretanje svjetla na biciklu $U_{\min} = 12 \text{ V}$, minimalna brzina bicikla za induciranje ovog elektromotornog napona je:

$$v_{\min} = \frac{\mathcal{E}_{\min} r_{os}}{2NB_{\max} r_Z^2} = 3.75 \text{ ms}^{-1} = 13.5 \text{ kmh}^{-1} \quad 1 \text{ bod}$$

Zadatak 4. (10 bodova)

Kroz tri beskonačno duga idealna paralelna vodiča A, B i C (vidi sliku) teče struja $I = 2 \text{ A}$ u istom smjeru, a razmaknuta su za udaljenost $d_0 = 1 \text{ m}$. Vodič B se u trenutku $t = 0$ započinje gibati jednoliko duž pravca brzinom $v = 2 \text{ ms}^{-1}$ u pravcu kako je prikazano na slici, ali tako da su sva tri vodiča i dalje paralelna. Izračunajte silu po jedinici dužine na vodič B u:

- početnom trenutku $t = 0$,
- nakon 1 sekunde. Skicirajte sile na vodič B.

**Rješenje:**

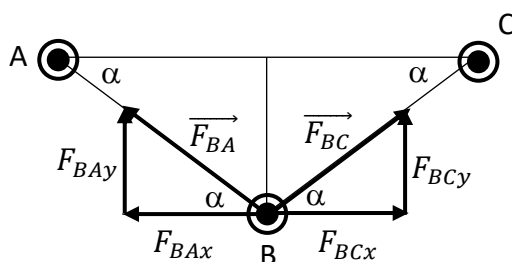
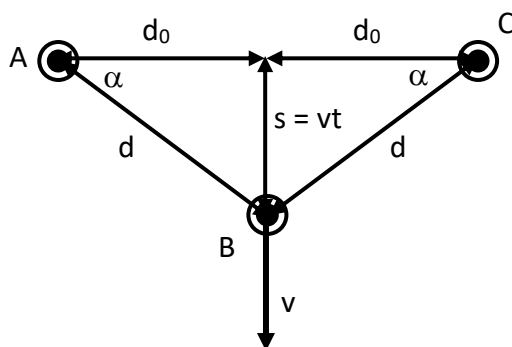
Sili na vodič B pridonosi međudjelovanje s vodičima A i C čija se udaljenost d mijenja u vremenu zbog gibanja vodiča B brzinom v :

$$d = \sqrt{d_0^2 + s^2}$$

$$s = vt$$

1 bod

U nekom trenutku t , položaj i sile na vodič B prikazane su na donjim slikama:



1 bod

Primijetimo da je međudjelovanje vodiča A s vodičem B simetrično s međudjelovanjem vodiča C s vodičem B, pa je dovoljno riješiti problem samo za jedno međudjelovanje.

Sila na vodič B potječe od magnetskih polja na mjestu vodiča B uslijed protjecanja struje kroz vodiče A i C:

$$B_A = B_C = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \quad 1 \text{ bod}$$

Sila po jedinici dužine l na vodič B uslijed magnetskog polja vodiča A (isto vrijedi i za međudjelovanje s vodičem C):

$$\begin{aligned} \frac{F_{BA}}{l} &= IB_A \\ \frac{F_{BA}}{l} &= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \sqrt{d_0^2 + s^2}} \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Sila na vodič B uslijed magnetskog polja vodiča A mijenja se u vremenu i potrebno ju je rastaviti na komponente po osima x i y :

$$\begin{aligned} \frac{F_{BAx}}{l} &= \frac{F_{BA}}{l} \cos \alpha \\ \frac{F_{BAy}}{l} &= \frac{F_{BA}}{l} \sin \alpha \end{aligned} \quad 0.5 \text{ bod}$$

Isto vrijedi i za silu na vodič B uslijed magnetskog polja vodiča C, osim što je sila F_{BCx} u suprotnom smjeru od sile F_{BAx} , no istog iznosa:

$$\begin{aligned} F_{BCx} &= -F_{BAx} \\ F_{BCy} &= F_{BAy} \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Odredimo iz trigonometrije:

$$\sin \alpha = \frac{s}{d} = \frac{s}{\sqrt{d_0^2 + s^2}} \quad 0.5 \text{ bod}$$

Komponente rezultantne sile F_B na vodič B uslijed međudjelovanja s vodičima A i C su:

$$\begin{aligned} \frac{F_{Bx}}{l} &= \frac{F_{BAx}}{l} + \frac{F_{BCx}}{l} = \frac{F_{BAx}}{l} - \frac{F_{BAx}}{l} = 0 \\ \frac{F_{By}}{l} &= \frac{F_{BAy}}{l} + \frac{F_{BCy}}{l} = \frac{2F_{BAy}}{l} \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Sredimo po y -osi:

$$\begin{aligned} \frac{F_{By}}{l} &= \frac{2F_{BAy}}{l} = \frac{2F_{BA}}{l} \sin \alpha = \frac{2\mu_0 I^2}{2\pi \sqrt{d_0^2 + s^2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{d_0^2 + s^2}} \\ \frac{F_{By}}{l} &= \frac{\mu_0 I^2}{\pi} \cdot \frac{s}{d_0^2 + s^2} \end{aligned}$$

Rezultantna sila na vodič B je:

$$\frac{F_B}{l} = \sqrt{\left(\frac{F_{Bx}}{l}\right)^2 + \left(\frac{F_{By}}{l}\right)^2} = \frac{F_{By}}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi} \cdot \frac{s}{d_0^2 + s^2} \quad 1 \text{ bod}$$

a) Uvrstimo za $t = 0$:

$$s(t = 0) = 0$$

$$\frac{F_B}{l} = 0$$

1 bod

b) Uvrstimo za $t = 1$ s:

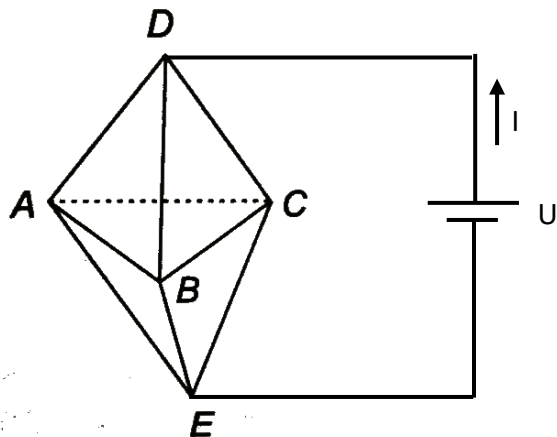
$$s(t = 1 \text{ s}) = 2 \text{ m}$$

$$\frac{F_B}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi} \cdot \frac{s}{d_0^2 + s^2} = 6.4 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

1 bod

Zadatak 5. (10 bodova)

Identične žice, svaka otpora $R = 1\ \Omega$ spojene su u električni krug tako da tvore bridove jednakostranične bipiramide (vidi sliku). Ako vrhove bipiramide spojimo na izvor istosmjernog napona $U = 5\text{ V}$, odredite struju I koja poteče krugom. Zanimajte unutarnji otpor izvora i otpor spojnih žica.

**Rješenje:**

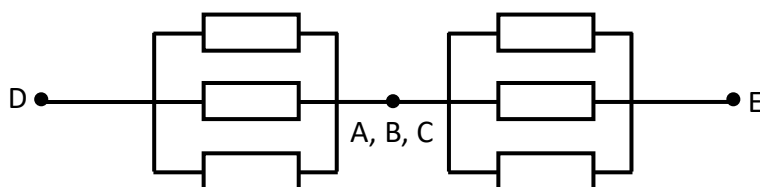
NAPOMENA: Zadatak se može riješiti ne više načina (rješavanjem pomoću Kirchhoffovih pravila, Δ i Y-transformacijama). Ovdje je prikazan najjednostavniji i najbrži način. Ako je učenik ispravno riješio zadatak drugim načinom, potrebno je dati puni broj bodova.

Bipiramida je simetrična s obzirom na bazu ABC (vidi sliku), zbog čega kroz stranice ABC neće teći struja, pa su vrhovi A, B i C na istom potencijalu i predstavljaju jedan čvor.

2 boda

U točki D struja se ravnomjerno grana prema točkama A, B i C, pa točka D predstavlja čvor s tri grane. Isto vrijedi i za točku E.

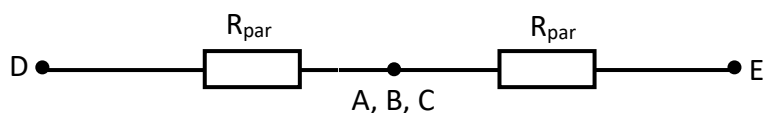
Spoj otpornika u bipiramidi stoga je ekvivalentan spoju na donjoj slici:



2 boda

Svaki je otpornik otpora $R = 1\ \Omega$.

Gornji je spoj ekvivalentan serijskom spoju paralelnih otpornika R_{par} :



1 bod

Ekvivalentni otpornici R_{par} iznose:

$$\frac{1}{R_{\text{par}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{R}$$

$$R_{\text{par}} = \frac{R}{3}$$

2 boda

Serijski spoj dvaju otpornika otpora R_{par} iznosi:

$$R_{\text{eq}} = R_{\text{par}} + R_{\text{par}} = \frac{2R}{3} = 0.667 \, \Omega$$

2 boda

Prema Ohmovu zakonu odredimo struju kroz krug:

$$I = \frac{U}{R_{\text{eq}}}$$

$$I = 7.50 \, \text{A}$$

1 bod

Konstante:

$$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \, \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$$

$$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \, \text{Fm}^{-1}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \, \text{Hm}^{-1} = 1.257 \cdot 10^{-6} \, \text{Hm}^{-1}$$

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \, \text{C}$$

$$g = 9.81 \, \text{ms}^{-1}$$

Mase elektrona, protona i neutrona:

$$m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \, \text{kg}$$

$$m_p = 1.673 \cdot 10^{-27} \, \text{kg}$$

$$m_n = 1.675 \cdot 10^{-27} \, \text{kg}$$